

Signature of the Invigilator



Marks obtained

TRIPURA MATHEMATICAL SOCIETY

Mathematical Olympiad - 2019

Full Marks : 60

Time : 2 hours

Roll No. of the Candidate : _____

All questions are compulsory. Calculation sheets are to be attached with this paper.

Section A (16 x 2 = 32 marks)

Underline the correct Answer. Half-mark will be deducted for each wrong marking.

1. The value of $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}}$ is

$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}}$ এর মান হল —

- a) 3 b) $\sqrt{3}$ c) 3.33 d) 2.33

2. The digit in the unit's place of $(2018)^{2019}$ is

$(2018)^{2019}$ এর এককের ঘরের অঙ্কটি হচ্ছে —

- a) 4 b) 2 c) 8 d) 6

3. If a circle has radius 3cm and a square is inscribed in the circle, then the area of the square is

যদি একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3cm এবং একটি বর্গক্ষেত্র ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয় তবে বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে —

- a) 18 sq. cm. b) 9 sq. cm. c) 24 sq. cm. d) 36 sq. cm.

4. If a, b, c are positive real numbers such that $a+b+c = 1$, then the maximum value of abc is

যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় যাহাতে $a+b+c = 1$, তখন abc এর সর্বোচ্চ মান হবে —

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{27}$ d) 27

5. The number of zeros at the end of the product $101 \times 102 \times 103 \times \dots \times 199 \times 200$ is

$101 \times 102 \times 103 \times \dots \times 199 \times 200$ এই গুণফলের শেষে শূন্যের সংখ্যা —

- a) 21 b) 22 c) 23 d) 24.

6. In a triangle ABC, AD is drawn perpendicular to BC. If the ratio of the area of $\triangle ABC$ to $\triangle ABD$ is 5:2, then what is the ratio of BD to DC?

ABC ত্রিভুজে AD, BC এর উপর লম্ব। যদি $\triangle ABC$ এবং $\triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফলের অনুপাত 5:2 হয়, তবে BD ও DC এর অনুপাত

- a) 2:3 b) 3:4 c) 2:5 d) 3:2.

7. A ladder rests against a wall with its lower end at a distance a cm from the wall and its upper end at a height 2a cm above the floor. If the lower end slides through a distance b cm in the same direction, then the upper end slides a distance

একটি দেওয়াল থেকে a cm দূরে রাখা একটি মই এর উপরিভাগ মেঝে থেকে 2a cm উপরে স্পর্শ করেছে। যদি মইটির নীচের প্রান্তটি একই দিকে b cm দূরে সরে যায় তখন উপরের প্রান্তটি যে দূরত্ব সরে যাবে তা হল —

- a) $a\sqrt{5} - \sqrt{5a^2 - (a+b)^2}$ cm b) $a\sqrt{5} - \sqrt{5a^2 - (a-b)^2}$ cm
c) $2a - \sqrt{5a^2 - (a+b)^2}$ cm d) $2a - \sqrt{5a^2 - (a-b)^2}$ cm.

8. P and Q are two points having coordinates $(-3, 7)$ and $(3, 5)$ respectively. From P a line parallel to Y-axis is drawn and from Q a line parallel to X-axis is drawn. If these two lines intersect at the point R, then the coordinates of R are

P এবং Q বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-3, 7)$ এবং $(3, 5)$ । P বিন্দু হইতে Y অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা এবং Q বিন্দু হইতে X অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কন করা হয়েছে। যদি দুটি রেখা পরস্পরকে R বিন্দুতে ছেদ করে তবে R এর স্থানাঙ্ক —

- a) $(-3, 5)$ b) $(7, 3)$ c) $(3, 7)$ d) $(0, 6)$.

9. The complete solution of $x^2 \geq 100$ is

$x^2 \geq 100$ এর সম্পূর্ণ সমাধান হচ্ছে —

- a) $x \geq 10$ b) $x \leq -10$ c) $x \geq 10$ or $x \leq -10$ d) $-10 \leq x \leq 10$

10. If n is a natural number, then $n(n+1)(n+2)$ is always divisible by

যদি n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তাহলে $n(n+1)(n+2)$ যে সংখ্যাটি দ্বারা সর্বদা বিভাজ্য তা হল —

- a) 5 b) 8 c) 4 d) 6

11. In an examination of Class X in a school, the average marks in Mathematics of sections A and B are 79 and 74 respectively. If the average marks of the entire class is 77, then the ratio of the numbers of students of sections A and B are

একটি স্কুলের ক্লাস X এর অঙ্ক পরীক্ষায় A বিভাগ ও B বিভাগ এর গড় নম্বর যথাক্রমে 79 এবং 74। যদি সমস্ত ক্লাসের ছাত্রছাত্রীদের গড় নম্বর 77 হয় তবে A বিভাগ ও B বিভাগের ছাত্রছাত্রীদের নম্বরের অনুপাত হবে—

- a) 2 : 3 b) 3 : 2 c) 12 : 13 d) 6 : 7.

12. If $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 17$, $a^3 + b^3 + c^3 = 15$ then the value of $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ is

যদি $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 17$, $a^3 + b^3 + c^3 = 15$ হয় তবে $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ এর মান হবে

- a) -4 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{4}$

13. A closed vessel in the shape of a right circular cone has height h and it contains some water in it. When the cone is vertical with its vertex downwards, the water stands to a height $\frac{h}{2}$. To what height will the water stand when the vessel is inverted?

h উচ্চতা বিশিষ্ট একটি বন্ধ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির পাত্রের মধ্যে কিছু জল আছে। এবার পাত্রটির শীর্ষ বিন্দুটি নীচের দিকে থাকলে পাত্রটিতে জলের উচ্চতা $\frac{h}{2}$ হয়। যখন পাত্রটির শীর্ষবিন্দু উপরের দিকে থাকবে তখন পাত্রটিতে জলের উচ্চতা —

- a) $h\left(1 - \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)$ b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$ c) $\frac{h}{4}$ d) $h\left(1 + \frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)$

14. The semi-perimeter of two similar triangles ABC and PQR are 18 cm and 12 cm respectively. If $\angle A = \angle P$ and $BC = 15$ cm, then the measure of QR is

দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ ABC এবং PQR এর অর্ধ পরিসীমা যথাক্রমে 18 cm এবং 12 cm। যদি $\angle A = \angle P$ এবং $BC = 15$ cm হয় তবে QR এর মান —

- a) 12 cm b) 10 cm c) 14 cm d) 9 cm

15. In a right-angled triangle, one angle is 60° . Then the ratio of the length of the side opposite to it and the hypotenuse is

একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ 60° । উক্ত কোণটির বিপরীত বাহু এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্যের অনুপাত হচ্ছে —

- a) 1 : 2 b) 2 : 3 c) $\sqrt{3} : 2$ d) $1 : \sqrt{3}$

16. The minimum value of $(\operatorname{cosec}^2 \theta + \sin^2 \theta)$ is

$(\operatorname{cosec}^2 \theta + \sin^2 \theta)$ এর ন্যূনতম মান হচ্ছে—

- a) 0 b) -1 c) 1 d) 2.

Section B (8 x 2 = 16 marks)

Write the answer only at the proper place indicated.

17. 1092 digits are used to number the pages of a book consecutively from page 1. Then, what is the number of pages in the book?

একটি বই এর পৃষ্ঠা 1 থেকে পরপর নামাঙ্কিত করতে ব্যবহৃত অঙ্কগুলির সংখ্যা 1092। বইটির পৃষ্ঠা সংখ্যা কত?

Ans.:

The arithmetic mean of 10 numbers is 33. If 3 numbers are excluded, then the mean of the remaining numbers is 30. What is the mean of the 3 numbers that are excluded?

10 টি সংখ্যার গাণিতিক গড় 33। যদি 3টি সংখ্যা বাদ দেওয়া হয় তবে বাকী সংখ্যাগুলির গড় 30। যে 3টি সংখ্যা বাদ দেওয়া হয়েছে তাদের গড় কত?

Ans.:

19. The breadth of a rectangle is increased by 6%. By what percent the length of the rectangle is to be increased so that the area is increased by 10%?

একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ 6% বৃদ্ধি করা হল। ক্ষেত্রফল 10% বৃদ্ধি পেলে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্যের শতকরা বৃদ্ধি কত হবে?

Ans.:

20. If the operation * be defined as $x*y = 3x^3 + 2xy + y^3$ and $2*a = a*2$, where a is an integer, then find the value of a^5 ?

যদি * চিহ্নটি সংজ্ঞায়িত হয় এভাবে $x*y = 3x^3 + 2xy + y^3$ এবং $2*a = a*2$ হয়, যেখানে a হচ্ছে অখন্ড সংখ্যা তাহলে a^5 এর মান কত?

Ans.:

21. If $\sin(3x - 40)^\circ = \cos(2x + 10)^\circ$, then what is the value of x?

যদি $\sin(3x - 40)^\circ = \cos(2x + 10)^\circ$ হয় তবে x এর মান কত?

Ans.:

22. An equilateral triangle of side $6\sqrt{3}$ cm is inscribed in a circle. What is the diameter of the circle in cm?

$6\sqrt{3}$ সেমিঃ বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত আছে। বৃত্তের ব্যাস কত সেমিঃ হবে?

Ans.:

23. If p is a prime number and $p = n^2 - 1$, where n is a natural number, then what is the value of p - n?

যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা হয় এবং $p = n^2 - 1$, যেখানে n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা, তখন p - n এর মান কত হবে?

Ans.:

24. The sum of the deviations of x_1, x_2, \dots, x_n from 4 is 125 and the sum of their deviations from 7 is 20. Then what is the value of n?

যদি 4 হইতে x_1, x_2, \dots, x_n এর বিচ্যুতিগুলির যোগফল 125 এবং 7 হইতে ঐ বিচ্যুতিগুলির যোগফল 20 হয় তবে n এর মান কত?

Ans.:

Section C (3 x 4 = 12 marks)

Important Steps of Calculation, Statements and of proof whenever necessary are to be given.

25. Let $f(x) = ax^2 + bx$, where a and b are real numbers. If $f(x)$ leaves a remainder 11 when divided by $x - 2$ and a remainder -1 when divided by $x + 1$, then find the values of a and b.

ধরি $f(x) = ax^2 + bx$, যেখানে a এবং b হচ্ছে বাস্তব সংখ্যা। যদি $f(x)$ কে $x - 2$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ 11 এবং $x + 1$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ -1 হয়, তাহলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

Ans.:

26. If in $\triangle ABC$, AD is the altitude and AE is the diameter of the circumcircle of $\triangle ABC$, then prove that $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

যদি $\triangle ABC$ এর AD লম্ব এবং AE , $\triangle ABC$ এর পরিবৃত্তের ব্যাস হয়, তবে প্রমাণ কর $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ ।

Ans.:

27. Find the roots of the equation $4x^3 - 16x^2 - 9x + 36 = 0$, given that one root is the negative of another.

যদি $4x^3 - 16x^2 - 9x + 36 = 0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির ঋণাত্মক হয় তবে সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় কর।

Ans.: