

Signature of the Invigilator



Marks obtained

# TRIPURA MATHEMATICAL SOCIETY

## Mathematical Olympiad - 2022

Full Marks : 60

Time : 2 hours

Roll No. of the Candidate (পরীক্ষার্থীর রোল নম্বর) : \_\_\_\_\_

All questions are compulsory. Calculation sheets are to be attached with the paper

### Section - A (16 x 2 = 32 marks)

Underline the correct answer. Half-mark will be deducted for each wrong marking.

- Given  $5A9 + 3B7 + 2C8 = 1114$ ; A, B, C are digits, then the maximum value of C is –  
দেওয়া আছে  $5A9 + 3B7 + 2C8 = 1114$ ; A, B, C তিনটি অঙ্ক, তবে C এর সর্বোচ্চ মান হবে –  
(a) 5 (b) 7 (c) 8 (d) None of these
- If  $\alpha, \beta$  are the zeros of the polynomial  $2x^2 + 5x + K$  such that,  $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \frac{21}{4}$ , then value of K is  
যদি  $\alpha, \beta$   $2x^2 + 5x + K$  এই বহুপদ রাশিমালার দুটি বীজ হয়, যেখানে  $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \frac{21}{4}$ , তবে K এর মান হবে –  
(a) -3 (b) 3 (c) -2 (d) 2
- If the system of equations  $kx + 3y - (k - 3) = 0$  and  $12x + ky - k = 0$  has infinitely many solutions, then the value of K is –  
যদি  $kx + 3y - (k - 3) = 0$  এবং  $12x + ky - k = 0$  এই সহসমীকরণ দুটির অসংখ্য সমাধান থাকে, তবে k এর মান হবে –  
(a) 6 (b) -6 (c) 0 (d) 3
- If 9, a, b, -6 are in Arithmetic Progression (A.P), then a + b is –  
যদি 9, a, b, -6 সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে (a + b) এর মান হবে –  
(a) 1 (b) 5 (c) 15 (d) 3
- The value of  $\sqrt{\sec^2 \theta + \cos^2 \theta}$  is –  
 $\sqrt{\sec^2 \theta + \cos^2 \theta}$  এর মান –  
(a)  $\tan \theta + \cot \theta$  (b)  $\sec \theta + \cos \theta$  (c)  $\frac{\sec^2 \theta}{\cos^2 \theta}$  (d)  $\tan \theta - \sec \theta$
- If PQ is a chord of length 8 cm of a circle of radius 5 cm. The tangents at P and Q intersect at a point T. Then the length of TP is –  
PQ একটি বৃত্তের 8 cm দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা; বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 cm। P ও Q বিন্দুতে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুটি পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করে। TP এর দৈর্ঘ্য হবে –  
(a)  $10\frac{2}{7}$  cm (b) 25.5 cm (c)  $\frac{20}{3}$  cm (d) 12 cm
- An unbiased six faced die is thrown twice. The probability that 5 will not come up either of the time is  
একটি ষোলকশূন্য পাশা (ছয়তল বিশিষ্ট) দুবার ছোঁড়া হল। কোন বারই পাশায় 5 আসবে না এর সম্ভাবনা হল –  
(a)  $\frac{35}{36}$  (b)  $\frac{25}{36}$  (c)  $\frac{1}{36}$  (d)  $\frac{11}{36}$
- Two solid right circular cones have the same height. The radii of their bases are  $r_1$  and  $r_2$ . They are melted and recast into a cylinder of the same height. The radius of the base of the cylinder is –  
দুটো একই উচ্চতার নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নেওয়া হল। শঙ্কু দুটির ভূমির ব্যাসার্ধ  $r_1$  এবং  $r_2$  একক। শঙ্কু দুটোকে গলিয়ে একই উচ্চতার একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরী করা হল। চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ হবে –  
(a)  $\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}}$  (b)  $\frac{r_1 + r_2}{3}$  (c)  $\frac{\sqrt{r_1 + r_2}}{3}$  (d)  $\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{3}}$

9. The hypotenuse of a right triangle is 10 cm and radius of the inscribed circle is 1 cm. The perimeter of the triangle is –

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভূজের দৈর্ঘ্য 10 cm এবং ত্রিভুজটির অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 cm। ত্রিভুজটির পরিসীমা হবে –

- (a) 15 cm (b) 22 cm (c) 24 cm (d) 18 cm

10. The ratio in which the line  $3x + y - 9 = 0$  divides the line segment joining points (1, 3) and (2, 7) is (1, 3) এবং (2, 7) বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশকে  $3x + y - 9 = 0$  রেখা যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা হল –

- (a) 3 : 4 (b) 2 : 3 (c) 4 : 3 (d) 3 : 2

11. The value of  $\sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$  is –  
 $\sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$  মান হবে –

- (a) 8 (b)  $9\frac{1}{2}$  (c) 9 (d) 10

12. Bulbul has to pay Rs. 482 for 19 apples and 11 guavas. Had he exchanged the number of apples and guavas, purchased, he would have to pay Rs. 64 less. The amount he has to pay more to purchase one apple than a guava is –

19 টি আপেল ও 11 টি পেয়ারা কেনার জন্য বুলবুলকে 482 টাকা দিতে হয়। কিন্তু সে যদি আপেল ও পেয়ারার সংখ্যা দুটো বিনিময় করে, তবে তাকে 64 টাকা কম দিতে হতো। একটি আপেলের দাম একটি পেয়ারার দামের চেয়ে কত বেশী?

- (a) Rs. 19 (b) Rs. 8 (c) Rs. 11 (d) Rs. 7

13. In  $\triangle ABC$ , XY parallel to AC is drawn, it meets AB at X and BC at Y, XY divides the triangle into two parts of equal areas. Then  $\frac{AX}{AB}$  equals –

ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুর সমান্তরাল XY রেখাংশ AB কে X এবং BC কে Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY রেখাংশ ত্রিভুজটিকে দুটো সমান ক্ষেত্রের অংশে ভাগ করে। এক্ষেত্রে  $\frac{AX}{AB}$  সমান হবে –

- (a)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$  (b)  $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$  (c)  $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$  (d)  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

14. The value of  $S = \frac{1}{2 \times 7} + \frac{1}{7 \times 12} + \frac{1}{12 \times 17} + \dots + \frac{1}{252 \times 257}$  is –

$S = \frac{1}{2 \times 7} + \frac{1}{7 \times 12} + \frac{1}{12 \times 17} + \dots + \frac{1}{252 \times 257}$  এর মান হবে –

- (a)  $\frac{5}{257}$  (b)  $\frac{25}{2 \times 257}$  (c)  $\frac{35}{2 \times 257}$  (d)  $\frac{51}{2 \times 257}$

15. The value of  $\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+\dots\infty}}}}$  is –  $\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+\dots\infty}}}}$  এর মান হবে –

- (a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10

16. The decimal expansion of the number  $\frac{14588}{8750}$  will –

$\frac{14588}{8750}$  সংখ্যার দশমিক প্রকাশ –

- (a) terminate after two decimal places (দুই দশমিক স্থানের পর শেষ হবে)  
(b) terminate after three decimal places (তিন দশমিক স্থানের পর শেষ হবে)  
(c) terminate after four decimal places (চার দশমিক স্থানের পর শেষ হবে)  
(d) not terminate (অসীম দশমিক)

### Section – B (8 x 2 = 16 marks)

17. The HCF of 2472, 1284 and a third number N is 12. If their LCM is  $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 103 \times 107$ , then the minimum value of the number N is –

2472, 1284 এবং একটি তৃতীয় সংখ্যা N এর গ.সা.গু 12। সংখ্যা তিনটির ল.সা.গু.  $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 103 \times 107$ , তাহলে N সংখ্যাটির সর্বনিম্ন মান হবে –

Ans.:

18. If  $x = cy + bz$ ,  $y = cx + az$ ,  $z = bx + cy$ , then the relation among a, b, c in simplified form is –  
যদি  $x = cy + bz$ ,  $y = cx + az$ ,  $z = bx + cy$  হয়, তবে a, b এবং c এর মধ্যে সম্পর্কটির সরলীকৃত রূপ হল –

Ans.:

19. If  $\operatorname{cosec} 39^\circ = x$ , then the value of  $\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 51^\circ} + \sin^2 39^\circ + \tan^2 51^\circ - \frac{1}{\sin^2 51^\circ \sec^2 39^\circ}$  is

যদি  $\operatorname{cosec} 39^\circ = x$  হয়, তবে  $\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 51^\circ} + \sin^2 39^\circ + \tan^2 51^\circ - \frac{1}{\sin^2 51^\circ \sec^2 39^\circ}$  এর মান হবে —

Ans.:

20. Given that  $x, a_1, a_2, y$  are in A.P and  $x, b_1, b_2, b_3, y$  are also in A.P, ( $x \neq y$ ) then the value of  $\frac{a_2 - a_1}{b_3 - b_2}$  is

দেওয়া আছে,  $x, a_1, a_2, y$  এবং  $x, b_1, b_2, b_3, y$  সমান্তর প্রগতিভুক্ত। তবে  $\frac{a_2 - a_1}{b_3 - b_2}$  এর মান কত ( $x \neq y$ )?

Ans.:

21. The area of a rectangle is same as that of a circle of radius  $\sqrt{\frac{35}{11}}$  cm. If the length of the rectangle exceeds its breadth by 3 cm, then find the length of the rectangle.

একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল  $\sqrt{\frac{35}{11}}$  cm ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। যদি আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থ অপেক্ষা 3 cm বেশী হয়, তবে উহার দৈর্ঘ্য কত?

Ans.:

22. In a frequency distribution table, modal value of the wages of 130 workers is Rs. 97.50,  $l = 94.5$ ,  $f_m = x + 15$ ,  $f_1 = x$ ,  $f_2 = x + 5$ . Find the upper limit of the modal class.

130 জন শ্রমিকের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে তাঁদের পারিশ্রমিকের সংখ্যাগুরু মান পাওয়া যায় 97.50 টাকা,  $l = 94.5$ ,  $f_m = x + 15$ ,  $f_1 = x$ ,  $f_2 = x + 5$ ; সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণীর উচ্চসীমা নির্ণয় কর।

Ans.:

23. If the points (2, 1), (x, y) and (7, 5) are collinear, then relation between x and y is

যদি (2, 1), (x, y) এবং (7, 5) এই বিন্দু তিনটি সমরেখ হয়, তবে x ও y এর মধ্যে সম্পর্কটি হবে —

Ans.:

24. ABC is an equilateral triangle and the points P, Q, R divides the sides AB, BC, CA in the ratio 1 : 2 (AP : PB = 1 : 2 etc.). If the area of the triangle PQR is 60 sq. cm. then the area of the triangle ABC is equal to —

ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং P, Q, R বিন্দু তিনটি যথাক্রমে AB, BC, CA বাহুকে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করে (AP : PB = 1 : 2 ইত্যাদি)। যদি PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 60 sq. cm. হয়, তবে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে —

Ans.:

### **Section – C (3 x 4 = 12 marks)**

**(In each of the following questions, important steps of calculation, statements and of proof whenever necessary are to be given)**

25. The angle of elevation of a cloud from a point 60 metres above a lake is  $30^\circ$  and the angle of depression of the reflection of the cloud in the lake is  $60^\circ$ . Find the height of the cloud.

একটি দীঘির জলের উপরিতল থেকে 60 মিটার উঁচুতে অবস্থিত একটি বিন্দু থেকে একটি মেঘের উন্নতি কোণ  $30^\circ$  এবং দীঘির জলে মেঘের প্রতিবিশ্বের অবনতি কোণ  $60^\circ$  দেখা গেল। দীঘির জলের উপরিতল থেকে মেঘের উচ্চতা নির্ণয় কর।

Ans.:

26. Find the median for the following distribution.

নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে মধ্যমা নির্ণয় কর।

Height (in cm) উচ্চতা (সেমি)	160-162	163-165	166-168	169-171	172-174
No. of People (লোকসংখ্যা)	15	117	136	118	14

27. In a  $\triangle ABC$ , P and Q are points on AB and AC respectively such that  $PQ \parallel BC$ . Prove that the median AD, drawn from A to BC, bisects PQ.

ABC ত্রিভুজে P ও Q যথাক্রমে AB ও AC এর ওপর দুটি বিন্দু এমন যে  $PQ \parallel BC$ । দেখাও যে, ABC ত্রিভুজের A বিন্দুগামী মধ্যমা, PQ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।