

TRIPURA MATHEMATICAL SOCIETY

Mathematical Olympiad - 2023

Full Marks : 60

Time : 2 hours

Roll No. of the Candidate (পরীক্ষার্থীর রোল নম্বর) : _____

All questions are compulsory. Calculation sheets are to be attached with the paper

Section - A (16 x 2 = 32 marks)

Underline the correct answer. Half-mark will be deducted for each wrong marking.

Group – A

1. A shopkeeper mixes 80 kg sugar worth of Rs. 6.75 per kg with 120 kg of sugar worth of Rs. 8.00 per kg. He earns a profit of 20% by selling the mixture. He sells it at the rate :
 একজন দোকানদার Rs. 6.75 প্রতি কিলো মূল্যের 80 কিলো চিনির সাথে Rs. 8.00 প্রতি কিলো মূল্যের 120 কিলো চিনি মিশিয়ে বিক্রি করে। মিশ্রিত চিনি বিক্রি করে সে 20% লাভ করে। যে দরে সে চিনি বিক্রি করে তা হল :
 (a) Rs. 7.50 per kg (b) Rs. 9 per kg (c) Rs. 8.20 per kg (d) Rs. 8.85 per kg
2. The compound interest on a certain sum for two years is Rs. 618 whereas the simple interest on the same sum at the same rate for two years is Rs. 600. The rate of interest per annum is :
 কোন আসলের দুই বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ হয় Rs. 618। যেখানে সেই একই আসলের একই হারে দুই বছরের জন্য সরল সুদ হয় Rs. 600। তাহলে বার্ষিক সুদের হার হল :
 (a) 18% (b) 9% (c) 6% (d) 3%
3. If $x + \frac{1}{x} = 3$, then the value of $x^6 + \frac{1}{x^6}$ is | যদি $x + \frac{1}{x} = 3$ হয়, তবে $x^6 + \frac{1}{x^6}$ এর মান হবে
 (a) 927 (b) 114 (c) 364 (d) 322
4. If $\log_{12}^{27} = a$, then $\log \log_6^{16}$ is | যদি $\log_{12}^{27} = a$ হয়, তবে \log_6^{16} এর মান হবে
 (a) $\frac{4(3-a)}{3+a}$ (b) $\frac{4(3+a)}{3-a}$ (c) $\frac{3-a}{4(3-a)}$ (d) $\frac{3-a}{4(3+a)}$
5. If the zeros of the polynomial $f(x) = k^2x^2 - 17x + k + 2$, $k > 0$ are reciprocal of each other, then the value of k is
 যদি $f(x) = k^2x^2 - 17x + k + 2$, $k > 0$ বহুপদ রাশিমালার শূন্য দুটি একটি অপরটির অনোন্যক হয়, তবে k এর মান হবে
 (a) 2 (b) -1 (c) -2 (d) 1
6. A bag contains 20 balls out of which x are black balls. If 10 more black balls are put in the box, the probability of drawing a black ball is double of what it was before. The value of x is :
 একটি থলীতে 20 টি বল আছে যার মধ্যে x টি বল কালো। যদি আরও 10 টি কালো বল থলীতে রাখা হয়, তবে থলী থেকে কালো বল তোলার সম্ভাবনা পূর্বের দ্বিগুণ হয়। x-এর মান হবে —
 (a) 0 (b) 5 (c) 10 (d) 40
7. If $\cos A + \cos^2 A = 1$, then the value of $\sin^2 A + \sin^4 A$ is
 যদি $\cos A + \cos^2 A = 1$, তবে $\sin^2 A + \sin^4 A$ এর মান হবে —
 (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 4
8. The sum of all two digit numbers each of which leaves remainder 3 when divided by 5 is
 দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সেই সমস্ত সংখ্যা যাদের 5 দিয়ে ভাগ করলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে 3 ভাগশেষ থাকে, তাদের যোগফল হল —
 (a) 952 (b) 999 (c) 1064 (d) 1120

9. For the distribution given below, the sum of the lower limits of the median class and the modal class is

নীচে দেওয়া পরিসংখ্যা বিভাজনে, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের শ্রেণী দুটির নিম্নসীমা দুটির যোগফল হল —

Marks	Below 5	Below 10	Below 15	Below 20	Below 25
No. of students	10	25	37	57	66

- (a) 15 (b) 25 (c) 30 (d) 40
10. In right $\triangle ABC$, $BC = 7$ cm, $AC - AB = 1$ cm and $\angle B = 90^\circ$. The value of $\cos A + \cos B + \cos C$ is
ABC সমকোণী ত্রিভুজে $BC = 7$ cm, $AC - AB = 1$ cm এবং $\angle B = 90^\circ$, $\cos A + \cos B + \cos C$ এর মান হবে —

- (a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{32}{24}$ (c) $\frac{31}{25}$ (d) $\frac{25}{31}$

11. The angles of elevations of the top of a tower from two points in the same straight line and at a distance of 9 m and 16 m, from the base of the tower are complementary. The height of the tower is একটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 9 m এবং 16 m দূরবর্তী দুটি বিন্দু (একই সরলরেখায় অবস্থিত) থেকে টাওয়ারটির চূড়ার উন্নতিকোণ দুটি পূরক। টাওয়ারের উচ্চতা হল —

- (a) 18 m (b) 16 m (c) 10 m (d) 12 m

12. The value of c for which the pair of equations $cx - y = 2$ and $6x - 2y = 3$ will have no solutions is c এর যে মানের জন্য $cx - y = 2$ এবং $6x - 2y = 3$ সমীকরণ দুটির কোন সমাধান থাকে না তা হল —

- (a) 3 (b) -3 (c) -12 (d) 0

13. Coordinates of P and Q are (4, -3) and (-1, 7). The abscissa of a point R on the line segment PQ, such that $\frac{PR}{PQ} = \frac{3}{5}$ is

P ও Q বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, -3) এবং (-1, 7)। R, PQ রেখাংশের উপর এমন একটি বিন্দু যে $\frac{PR}{PQ} = \frac{3}{5}$

তবে R বিন্দুর ভূজ হবে —

- (a) $\frac{18}{5}$ (b) $\frac{17}{5}$ (c) 1 (d) $\frac{17}{8}$

14. E and F are respectively the mid points of the sides AB and AC of $\triangle ABC$ and area of the quadrilateral BEFC is K times the area of $\triangle ABC$. The value of K is

E এবং F যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু এবং BEFC চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফলের K গুণ। তাহলে K-এর মান হবে —

- (a) 1/2 (b) 3 (c) 3/4 (d) 4

15. Four circular cardboard pieces each of radius 7 cm, are placed in such a way that each piece touches two other pieces. The area of the space enclosed by the four pieces is :

7 cm ব্যাসার্ধ্যুক্ত চারটি বৃত্তাকার পিচবোর্ডের টুকরো এমনভাবে রাখা আছে যে, প্রত্যেক টুকরো অন্য দুটোকে স্পর্শ করে। বৃত্তাকার টুকরো চারটি দিয়ে আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল —

- (a) 21 cm^2 (b) 42 cm^2 (c) 84 cm^2 (d) 168 cm^2

16. From a 25 cm x 35 cm rectangular card board, an open box is to be formed by cutting out identical squares of area 25 cm^2 from each corner and turning up the sides. The volume of the box is

একটি 25 cm x 35 cm মাপের আয়তকার কার্ডবোর্ডের কোণাগুলো থেকে সদৃশ বর্গাকার 25 cm^2 মানের চারটি ক্ষেত্র কেটে নিয়ে, ধারগুলোকে উপরদিকে তুলে একটি খোলা বাক্স বানানো হল। বাক্সটির আয়তন হবে —

- (a) 3000 cm^3 (b) 1875 cm^3 (c) 21875 cm^3 (d) 1250 cm^3

Section – B (8 x 2 = 16 marks) (Write the answers only at the proper place)

17. Let P(4, k) be any point on the line $y = 6 - x$. If the vertical segment PQ (Q is on the x-axis) is rotated about y-axis, the volume of the resulting cylinder is

$y = 6 - x$ সরলরেখার উপর P(4, k) একটি বিন্দু। যদি উল্লম্ব PQ রেখাংশকে (Q বিন্দুটি x অক্ষের উপর অবস্থিত) y অক্ষের চারিদিকে ঘোরানো হয়, তবে উৎপন্ন চোঙের আয়তন হবে —

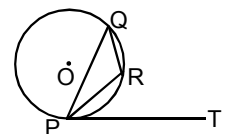
Ans :

18. In the figure, PQ is a chord of a circle with centre O and PT is the tangent at P such that $\angle QPT = 70^\circ$.

Then the measure of $\angle PRQ$ is equal to

প্রদত্ত চিত্রে, O কেন্দ্র যুক্ত বৃত্তে PQ একটি জ্যা এবং PT হল P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক,

যেখানে $\angle QPT = 70^\circ$ । তাহলে $\angle PRQ$ এর পরিমাপ হবে —



Ans :

19. AB and CD are two parallel chords of a circle such that AB = 10 cm and CD = 24 cm. If the chords are on the opposite sides of the centre and the distance between them is 17 cm, the radius of the circle is –

AB এবং CD হল কোনও বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা; যারা বৃত্তটির কেন্দ্রের বিপরীত দিকে অবস্থিত। যদি AB = 10 cm এবং CD = 24 cm এবং জ্যা দুটির মধ্যকার দূরত্ব 17 cm হয় তাহলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত?

Ans :

20. $\triangle ABC \approx \triangle PQR$ and $\frac{\text{area } \triangle ABC}{\text{area } \triangle PQR} = \frac{16}{9}$; PQ = 18 cm and BC = 12 cm, Find the measures of AB and QR.

$\triangle ABC \approx \triangle PQR$ এবং $\frac{\triangle ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\triangle PQR \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{16}{9}$; PQ = 18 cm এবং BC = 12 cm, AB ও QR বাহুর পরিমাপ কত হবে?

Ans :

21. A hollow cube of internal edge 22 cm is filled with spherical marbles of diameter 0.5 cm each and it is assumed that $\frac{1}{8}$ th space of the cube remains unfilled. Then the number of marbles that the cube can accommodate is

একটি ফাঁপা ঘনকের ভেতরের দিকে ধারের মাপ 22 cm। ঘনকটি গোলাকার মার্বেল দিয়ে পূর্ণ করা হল। প্রত্যেকটি মার্বেলের ব্যাস 0.5 cm। এটা যদি ধরে নেওয়া হয় যে ঘনকটির $\frac{1}{8}$ অংশ অপূর্ণ রয়ে গেল, তবে ঘনকটি যতগুলো মার্বেল ধারণ করতে পারে তার সংখ্যা হবে —

Ans :

22. A dishonest shopkeeper prefers to sell his goods at the cost price but uses a weight of 800 gm instead of 1 kg weight. What will be his profit percent ?

এক অসাদু ব্যবসায়ী তার দ্রব্য ক্রয়মূল্যে বিক্রি করে কিন্তু 1 কিলো ওজনের পরিবর্তে 800 গ্রাম ওজনের বাটখারা ব্যবহার করে। এতে তার শতকরা লাভ কত হবে?

Ans :

23. Find the value of $\cot 17^\circ \left[\cot 73^\circ \cos^2 22^\circ + \frac{1}{\tan 73^\circ \sec^2 68^\circ} \right]$

$\cot 17^\circ \left[\cot 73^\circ \cos^2 22^\circ + \frac{1}{\tan 73^\circ \sec^2 68^\circ} \right]$ এর মানটি বের কর।

Ans :

24. Write the week days of the year 2024, which will come 53 times (2023 ends on sunday).

2024 সালে সপ্তাহের যে দিনগুলো 53 বার আসবে সেগুলো লিখো (দেওয়া আছে 2023 সাল রবিবারে শেষ হবে)।

Ans :

Section – C (3 x 4 = 12 marks)

(In each of the following questions, important steps of calculation, statements and of proof whenever necessary are to be given)

25. Find the square root of $(a^2 - bc)^3 + (b^2 - ca)^3 + (c^2 - ab)^3 - 3(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab)$
বর্গমূল নির্ণয় কর : $(a^2 - bc)^3 + (b^2 - ca)^3 + (c^2 - ab)^3 - 3(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab)$

Ans :

26. Prove that circumcentre of a right angled triangle is the mid point of its hypotenuse.

প্রমাণ কর যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

Ans :

27. Height of a cone is 9 cm and the radius of its base is 2.5 cm. Joining a hemisphere of the same diameter as that of the cone, a cone of ice-cream is prepared. Find the volume of the ice-cream.

(Take $\pi = \frac{22}{7}$)

একটি শঙ্কুর সাথে এর ভূমির ব্যাসের সমান ব্যাসযুক্ত একটি অর্ধ গোলক মিলিয়ে একটি আইস-ক্রীম শঙ্কু তৈরী করা হল। যদি শঙ্কুর উচ্চতা 9 সেমি এবং এর ভূমির ব্যাসার্ধ 2.5 সেমি হয়, আইস-ক্রীম শঙ্কুর আয়তন বের কর।

($\pi = \frac{22}{7}$ ধরে)